Análise Matemática IV

Problemas para as Aulas Práticas

Semana 8

1. Para cada uma das seguintes equações diferenciais, esboce o campo de direcções e trace os respectivos tipos de soluções .

(a) $y' = \dfrac{t\,y}{1+t^2}$,

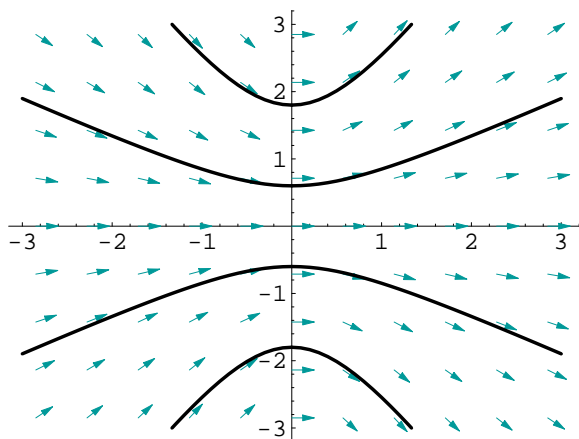
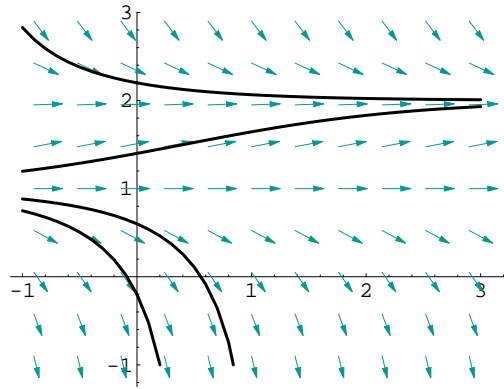
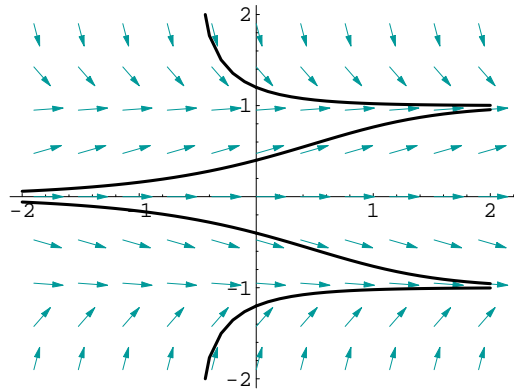
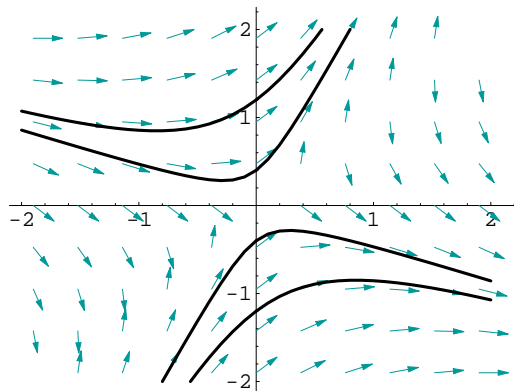
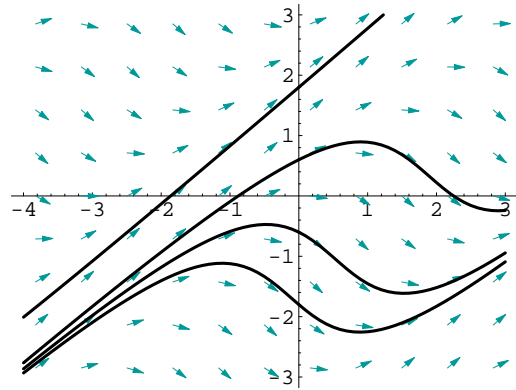
(b) $y' = (2-y)\,(y-1)$,

(c) $y' = y\,(1-y^2)$,

(d) $y' = \dfrac{y+t}{y-t}$,

(e) $y' = \operatorname{sen}(y-t)$,

Resolução:

(a) $y' = \dfrac{t\,y}{1+t^2}$

(b) $y' = (2-y)(y-1)$

(c) $y' = y(1-y^2)$

(d) $y' = \dfrac{y+t}{y-t}$

(e) $y' = \operatorname{sen}(y - t)$

2. Mostre que existe uma solução de classe C^1 para o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = 6t\sqrt[3]{y^2} \\ y(0) = 0 \ , \end{cases}$$

diferente da solução $y(t) = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Explique porque é que isto não contradiz o teorema de Picard.

Resolução:

Como referido no enunciado, uma das soluções do PVI é a solução constante $y(t) \equiv 0$. Por outro lado, se $y(t) \neq 0$, a equação pode ser escrita na forma

$$y^{-2/3}\frac{dy}{dt} = 6t \ \Leftrightarrow\ \frac{d}{dt}\Big(\int y^{-2/3}dy\Big) = 6t \ \Leftrightarrow\ 3y^{1/3} = 3t^2 + c \ \Leftrightarrow\ y(t) = (t^2 + k)^3$$

Esta solução polinomial, logo é diferenciável em $\mathbb{R}$. A condição inicial $y(0) = 0$ é satisfeita se tomarmos $k = 0$, logo outra solução do PVI é

$$y(t) = t^6.$$

Para verificar que não há contradição com o Teorema de Picard, note-se que, sendo $f(t, y) = 6t\sqrt[3]{y^2}$, f é contínua em $\mathbb{R}^2$ e

$$\lim_{y\to 0}\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{y\to 0} 4ty^{-1/3} = \infty$$

pelo que é de esperar que $f(t, y)$ não seja localmente lipschitziana em ordem a y em qualquer subconjunto compacto de $\mathbb{R}^2$ que contenha $(t_0, y_0) = (0, 0)$. De facto, se $|t| \leq \alpha$ e $|y| \leq \beta$,

$$|f(t, y) - f(t, x)| = |6t\sqrt[3]{y^2} - 6t\sqrt[3]{x^2}| = |6t||y^{2/3} - x^{2/3}| = 6|t|\Big|\frac{y^{2/3} - x^{2/3}}{y - x}\Big|\,|y - x|$$

e é fácil de verificar que para y, x numa vizinhança de 0 a função

$$\Big|\frac{y^{2/3} - x^{2/3}}{y - x}\Big|$$

não é limitada. Concluimos então que a continuidade de f implica existência de solução do PVI, mas o facto de não ser localmente lipschitziana em ordem a y numa vizinhança de $(0,0)$ não assegura a unicidade de solução do PVI.

3. Mostre que o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = y^{1/2} \\ y(0) = 0 \ , \end{cases}$$

tem infinitas soluções, e explique porque esse facto não contradiz o Teorema de Picard.

Resolução:

Começamos por verificar que a solução constante $y(t) \equiv 0$ é solução do PVI. Por outro lado, se $y(t) \neq 0$ a equação pode ser escrita na forma

$$y^{-1/2}\frac{dy}{dt} = 1 \ \Leftrightarrow \ \frac{d}{dt}\Big(\int y^{-1/2}dy\Big) = 1 \ \Leftrightarrow \ 2y^{1/2} = t + c \ \Leftrightarrow \ y(t) = \Big(\frac{t}{2} + k\Big)^2$$

Visto termos obtido uma função polinomial verifica-se que y é diferenciável em $\mathbb{R}$, e $y(0) = 0$ implica que outra solução do PVI é

$$y(t) = \frac{t^2}{4}$$

Podemos agora utilizar "cortar" e "colar" entre estas duas soluções para criar novas soluções do PVI. Isto é, para $t_0 > 0$, defina-se

$$y_{t_0}(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } \ t \leq t_0 \\ \\ \Big((\dfrac{t}{2} - \dfrac{t_0}{2}\Big)^2 & \text{se } \ t > t_0 \end{cases}$$

Verifica-se que y_{t_0} é diferenciável em $\mathbb{R}$, verifica a equação diferencial (dado que 0 e $(\frac{t}{2} - \frac{t_0}{2})^2$ a verificam) e $y_{t_0}(0) = 0$. De igual modo, para cada $s_0 < 0$

$$y_{s_0}(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } \ t \geq s_0 \\ \\ \Big(\dfrac{t}{2} - \dfrac{s_0}{2}\Big)^2 & \text{se } \ t < s_0 \end{cases}$$

é tambem solução do PVI.

Finalmente, o facto de existirem uma infinidade de soluções deve-se a que a função $f(t,y) = \sqrt{y}$ é contínua em $y \geq 0$, mas não é localmente lipschitziana em ordem a y em qualquer conjunto compacto de $\mathbb{R}^2$ que contenha a origem $(0,0)$. De facto, temos que:

$$|f(t,x) - f(t,y)| = \left|\frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{x - y}\right| |x - y|,$$

onde a função

$$\left|\frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{x - y}\right|,$$

não +e limitada para x, y num vizinhança qualquer da origem.

4. Considere o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} (1-t)y\dfrac{dy}{dt} = 1 - y^2 \\ y(1/2) = 2 \ , \end{cases}$$

(i) Determine uma solução do PVI, e justifique que essa é a única solução do problema definida para t numa vizinhança de $1/2$.

(ii) Mostre que o PVI admite um número infinito de soluções definidas em $\mathbb{R}$.

(iii) Diga, justificando, porque não há contradição ao Teorema de Picard.

Resolução:

(i) Começamos por observar que a equação diferencial faz sentido para qualquer $t \in \mathbb{R}$ e qualquer $y \in \mathbb{R}$. Trata-se de uma equação separável, pelo que para $t \neq 1$ e $y^2 \neq 1$:

$$\begin{aligned} \frac{y}{y^2-1}\frac{dy}{dt} = \frac{1}{t-1} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\int\Big(\frac{y}{y^2-1}\,dy\Big) = \frac{1}{t-1} \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\log(y^2-1) = \log(t-1) + c \\ &\Leftrightarrow \quad y^2 = k(t-1)^2 + 1 \\ &\Leftrightarrow \quad y(t) = \sqrt{k(t-1)^2+1} \ \text{ ou } \ y(t) = -\sqrt{k(t-1)^2+1} \end{aligned}$$

Dado que $y(1/2) = 2 > 0$, a solução do PVI é

$$y(t) = \sqrt{1 + 12(t-1)^2} \tag{1}$$

Para mostrar que é a única solução do PVI teremos que verificar que

$$f(t,y) = \frac{1-y^2}{y(1-t)}$$

verifica as condições do Teorema de Picard em certo conjunto $D \subset \mathbb{R}^2$ contendo a condição inicial $(t_0, y_0) = (1/2, 2)$. O domínio de f é $D = \{(t,y) \ : \ y \neq 0 \text{ e } t \neq 1\}$ e é óbvio que $(t_0, y_0) = (1/2, 2) \in D$. Por outro lado dado que f é uma função racional, em D, f é contínua e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(t,y) = -\frac{1+y^2}{y^2(1-t)}$$

é tambem contínua em D (pelo que f é localmente lipschitziana em relação a y em D). Estamos então nas condições do Teorema de Picard e concluir que o PVI admite solução única numa vizinhança de $t_0 = 1/2$. Pela unicidade conclui-se que a solução tem que ser dada por (1).

(ii) Começemos por calcular o intervalo máximo da solução calculada na alínea anterior. Sabemos que $I =]\alpha, \beta[$ em que

$t_0 = 1/2 \in I$;

quando $t \to \alpha^+$ ou $(t, y(t)) \to \partial D$ ou $|y(t)| \to \infty$;

quando $t \to \beta^-$ ou $(t, y(t)) \to \partial D$ ou $|y(t)| \to \infty$.

Visto o domínio de diferenciabilidade de $y(t)$ ser $\mathbb{R}$, podemos desde já concluir que $y(t)$ não explode em tempo finito. Por isso, o único problema que pode surgir é o de $(t, y(t))$ atingir a fronteira de D, isto é, quando $t = 1$ ou $y(t) = 0$. Mais uma vez, pela expressão de $y(t)$ podemos concluir que $y(t) \neq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, pelo que o único problema é mesmo $t = 1$. Tem-se então que o intervalo máximo de *solução única* é

$$I =]-\infty, 1[$$

e

$$y(t) \to 1 \quad \text{quando} \quad t \to 1^-$$

Por outro lado, sabemos que

$$y_k(t) = \sqrt{k(t-1)^2 + 1}$$

é solução da equação diferencial e

$$y_k(1) = 1 \qquad , \qquad \forall k \geq 0$$

Assim, $y_k(t)$ é solução do problema

$$\begin{cases} (1-t)y\dfrac{dy}{dt} = 1 - y^2 \\ \\ \lim_{t \to 1^+} y(t) = 1 \quad \text{ou} \quad y(1) = 1 \end{cases}$$

verificando-se que o seu intervalo de definição não é limitado superiormente. Finalmente para qualquer $k \geq 0$, defina-se

$$Y_k(t) = \begin{cases} y(t) & \text{se} \quad t < 1 \\ \\ y_k(t) & \text{se} \quad t \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} \sqrt{12(t-1)^2 + 1} & \text{se} \quad t < 1 \\ \\ \sqrt{k(t-1)^2 + 1} & \text{se} \quad t \geq 1 \end{cases}$$

é diferenciável em $\mathbb{R}$, verifica a equação diferencial, verifica a condição inicial e está definida em $\mathbb{R}$. Construimos assim uma infinidade de soluções do PVI definidas em $\mathbb{R}$.

(iii) Como já referimos, o PVI tem solução única, enquanto $(t, y(t))$ não atinge a fronteira de D, isto é enquanto $t < 1$. No entanto quando $t = 1$ o teorema deixa de ser aplicável pois f não verifica as suas hipóteses. Numa vizinhança do instante $t = 1$ deixamos de poder concluir algo a partir do Teorema de Picard, visto que se escrevermos o nosso problema na forma

$$\begin{cases} \dot{y} = f(t, y) \\ \\ y(1/2) = 2 \end{cases}$$

temos que:

$$f(t, y) = \frac{1 - y^2}{1 - t},$$

e a função não está definida em $t = 1$.

5. Mostre que o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{3y^2 + \sqrt[3]{(t+1)^2}} \\ y(0) = 1 \ , \end{cases}$$

tem uma única solução $y(t)$, definida para $t \in [0, +\infty[$, e calcule $\lim\limits_{t \to +\infty} y(t)$.

Sugestão: Não tente resolver a equação diferencial. Considere a função $u(t)$ definida por

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = \dfrac{1}{3u^2} \\ u(0) = 1 \ . \end{cases}$$

Uma vez determinada a função $u(t)$, mostre que

$$\frac{dy}{dt} \geqslant \frac{1}{3\,(u(t))^2 + \sqrt[3]{(t+1)^2}} \ ,$$

e integre esta relação entre 0 e t.

Resolução:
Definindo

$$f(t,y) = \frac{1}{3\,(y(t))^2 + \sqrt[3]{(t+1)^2}}$$

o domínio de f é

$$D = \left\{(t,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 3\,(u(t))^2 + \sqrt[3]{(t+1)^2} \neq 0\right\} = \mathbb{R}^2 \setminus \left\{(t,y) = (-1,0)\right\}$$

Começemos por mostrar existência e unicidade de solução local. Verifica-se facilmente que tanto f como $\partial f/\partial y$ são contínuas em D e visto $(t_0, y_0) = (0,1) \in D$, o Teorema de Picard assegura existência de uma solução do PVI $y(t)$, definida para t numa vizinhança, de $t_0 = 0$, isto é, a solução $y(t)$ existe e é única para $t \in I =]\alpha, \beta[$. Visto que $0 \in I$. podemos concluir que $y(t)$ existe e é única para $t \in I = [0, \beta[$. Falta mostrar que $\beta = \infty$, isto é, que nem $(t, y(t))$ atingem a fronteira de D para qualquer $t > 0$, nem $|y(t)| \to \infty$ em tempo finito. Como não conhecemos a solução do PVI, teremos que usar um teste de comparação.

Por um lado

$$f(t,y) > 0 \qquad , \qquad \forall (t,y) \in D \tag{2}$$

Considere-se o PVI

$$\begin{cases} \dot{u} = 0 \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

A sua única solução é $u(t) = 1$, e como consequência de (2)

$$y(t) \geq 1 \qquad , \qquad \forall t \in \mathbb{R} \tag{3}$$

De (3) podemos concluir que

$y(t) \neq 0$ para todo $t \geq 0$, e

$y(t)$ é limtada inferiormente em $[0, \infty[$.

Temos ainda que mostrar que $y(t)$ "não explode" em $[0, \infty[$. Visto

$$y^2 \geq 0 \qquad , \qquad \forall y \in \mathbb{R}$$

podemos escrever que

$$f(t, y) \leq \frac{1}{(t+1)^{2/3}} \qquad , \qquad \forall t \geq 0 \ , \ y \in \mathbb{R} \tag{4}$$

Considere-se o PVI

$$\begin{cases} \dot{v} = \dfrac{1}{(t+1)^{2/3}} \\ \\ v(0) = 1 \end{cases}$$

A sua única solução é $v(t) = 3\sqrt[3]{t+1}$, e como consequência de (4)

$$y(t) \leq 3\sqrt[3]{t+1} \qquad , \qquad \forall t \in \mathbb{R} \tag{5}$$

Dado que a função $v(t)$ está definida em $[0, \infty[$ (na verdade em $]-1, \infty[$ mas para a nossa análise só precisamos de saber o que se passa para $t \geq 0$), podemos então afirmar que $y(t)$ "não explode" no intervalo $[0, \infty[$. Conclui-se que $y(t)$ está definida para $t \in [0, \infty[$. Finalmente para concluir algo sobre o seu limite quando $t \to \infty$, temos

$$\lim_{t\to\infty} u(t) \leq \lim_{t\to\infty} y(t) \leq \lim_{t\to\infty} v(t)$$

ou seja

$$1 \leq \lim_{t\to\infty} y(t) \leq \infty$$

Estas desigualdades não nos permitem concluir algo sobre $\lim_{t\to\infty} y(t)$. Para estimarmos este limite de modo mais preciso, necessitamos de minorar $f(t, y)$ de forma menos grosseira. Para tal, usando (5), podemos concluir que

$$f(t, y) \geq \frac{1}{27\sqrt[3]{(t+1)^2} + (t+1)^{2/3}} \geq \frac{1}{28\sqrt[3]{(t+1)^2}} \tag{6}$$

Considere-se o PVI

$$\begin{cases} \dot{w} = \dfrac{1}{28(t+1)^{2/3}} \\ \\ w(0) = 1 \end{cases}$$

A sua única solução é $w(t) = \frac{3}{28}\sqrt[3]{t+1}$, e como consequência de (6)

$$y(t) \geq \frac{3}{28}\sqrt[3]{t+1} \qquad , \qquad \forall t \in \mathbb{R} \tag{7}$$

Finalmente (usando (5) e (7)), concluimos que

$$\frac{3}{28}\sqrt[3]{t+1} \leq y(t) \leq 3\sqrt[3]{t+1} \quad , \quad \forall t \geq 0$$

logo:

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = +\infty$$